Concours EIA
Ecoles d'Ingénieurs Associées

Session de mai 2001

Epreuve de MATHEMATIQUES - durée : 3 heures

Attention	- aucun document autorisé. - l'usage de la calculatrice est interdit. - l'épreuve comporte 1 problème ; les parties I, II et III sont indépendantes.

Notations

E_0 désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle :

$I = [-1\ ;\ 1]$.

E_2 désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et de classe C^2 sur l'intervalle I.

On considère l'application φ définie par :

$$\forall\ f \in E_2\ ;\ \forall\ g \in E_2\ ;\ \varphi(f;g) = \int_{-1}^{1} f(t) \times g(t) \times (1-t^2)^{\alpha}\, dt$$

où α est un nombre réel tel que $\alpha > -\frac{1}{2}$.

On se propose d'étudier quelques propriétés de cette application et de certains ensembles particuliers.

I. Première Partie : Etude de trois exemples

Déterminer $\varphi(f;g)$ dans les trois cas suivants.

1) $f(t) = t$ et $g(t) = 1$

2) $f(t) = \sin(t)$ et $g(t) = 1 + t^2$, (l'observation est plus importante que des calculs)

3) $f_n(t) = t^n$ (n étant un entier naturel) et $g(t) = 1$, on note $I_n = \varphi(f_n;g) = \int_{-1}^{1} t^n \times (1-t^2)^{\alpha}\, dt$

a) Calculer I_{2n+1}

b) Montrer que $I_{2n} = 2\int_0^1 t^{2n} \times (1-t^2)^{\alpha}\, dt$, puis que la suite (I_{2n}) est monotone. Est-elle convergente ?

c) Montrer que pour $n \geq 1$ on a :

$$0 \leq I_{2n} \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(u)du .$$

d) Démontrer que pour tout réel X de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $0 \leq I_{2n} \leq 2X\sin^{2n}(X) + (\pi - 2X)$

e) En déduire que $0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_{2n} \leq \pi - 2X$.

Quelle est la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$?

II. Deuxième Partie : Caractérisation de φ

1) Démontrer que φ est définie sur $E_2 \times E_2$.

a) Démontrer que pour tout élément de E_2, on a : $\varphi(f;f) \geq 0$.

b) A quelle condition a-t-on : $\varphi(f;f) = 0$?

2) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E_2.

3) Peut-on avoir $\varphi(f;g) = 0$ avec deux fonctions f et g non identiquement nulles sur I ?

III. Troisième Partie : Etude d'une application de E_2 dans E_0

On considère l'application π définie par :

$\forall\ f \in E_2\ ;\ \pi(f) = \hat{f}$ définie par $\hat{f}(t) = (1-t^2)\times f''(t) - 2\times(\alpha+1)\times t \times f'(t)$

1) Montrer que π est un homomorphisme de E_2 dans E_0.

2) a) Déterminer $\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)^{\alpha+1} f'(t)\right]$

b) En déduire $\int_{-1}^{1} \hat{f}(t)g(t)(1-t^2)^{\alpha}\, dt = -\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)(1-t^2)^{\alpha+1}\, dt$

c) Démontrer que $\varphi\left(\hat{f};g\right) = \varphi\left(f;\hat{g}\right)$

IV. Quatrième Partie : Espace des polynômes

On désigne par X_n l'ensemble des restrictions à [-1 ; 1] des polynômes de degré inférieur à n, où n est un entier naturel. On note P_k la restriction à [-1 ; 1] du polynôme définie par $P(x) = x^k$.

1) a) Déterminer $\hat{P}_k$ pour $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

b) En déduire que X_n est stable par π.

2) a) Déterminer la matrice de π dans la base $(P_0 ; P_1 ; \ldots ; P_n)$ de X_n.

b) Déterminer le spectre de π.

V. Cinquième Partie : Famille orthogonale

Soit P un élément de degré n de X_n tel que $\varphi(P_k ; P) = 0 \quad \forall k \in \{0;1;2;...;n-1\}$

1) a) Démontrer que $(P ; P_0 ; P_1 ; \ldots ; P_{n-1})$ est une base de X_n.

b) Démontrer que $\varphi(\hat{P}; P_k) = 0 \quad \forall k \in \{0;1;2;...;n-1\}$.

2) a) Soit $A = vect(P_0; P_1; \cdots; P_{n-1})$. Déterminer une base de A.

b) Justifier l'existence d'une base orthogonale $\{Q_0; Q_1; ...; Q_{n-1}\}$ de A telle que $\deg(Q_k) = k$

c) Démontrer que $(P ; Q_0 ; Q_1 ; \ldots ; Q_{n-1})$ est une base orthogonale de X_n.

3) a) Démontrer que $\varphi(\hat{P}; Q_k) = 0 \quad \forall k \in \{0;1;2;...;n-1\}$.

b) En déduire que $\hat{P}$ et P sont colinéaires.

c) On note a_n le coefficient du terme de degré n dans le polynôme P. Déterminer en fonction de a_n le coefficient $\hat{a}_n$ du terme de degré n dans $\hat{P}$.

d) En déduire la valeur du coefficient de colinéarité λ_n tel que $\hat{P} + \lambda_n P = 0$.

VI. Sixième Partie : Construction d'une famille orthogonale

On note f la fonction définie sur [- 1 ; 1] par $f(t) = (1-t^2)^{n+\alpha}$, où n est un entier naturel non nul.

1) a) Déterminer l'expression des trois premières dérivées de f.

b) Démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \{1;2;...;n\} \quad \frac{d^p}{dt^p} f(t) = (-1)^p 2^p (n+\alpha)(n+\alpha-1)...(n+\alpha-p+1)(1-t^2)^{n+\alpha-p} S_p(t)$$

où S_p est un polynôme de degré p tel que $S_p(1)=1$.

2) a) Démontrer que $\varphi(P_0; S_n) = 0$.

b) Démontrer que : $\forall k \in \{0;1;2;...;n-1\} \quad \varphi(P_k; S_n) = 0$.

c) En déduire que pour tous entiers naturels non nuls et différents n et m on a :

$\varphi(S_m; S_n) = 0$.